Capítulo 2

Método triparamétrico de perturbações

Este método que aqui se apresenta constitui uma extensão do método uniparamétrico de Deprit (1969) e do método biparamétrico de Abad-Ribera (1981) para o caso em que a função hamiltoniana do sistema dinâmico se pode desenvolver em série de três parâmetros.

A sua aplicação é de interesse, entre outros, em muitos problemas da mecânica celeste. Em particular, permite resolver analiticamente alguns casos do problema de perda de massa quando esta depende do tempo e da distância, problemas de n-corpos hierarquizados ou mistura de ambos, entre outros.

2.1 Introdução

No estudo de muitos problemas dinâmicos surge a necessidade de resolver equações diferenciais não lineares. Como, em geral, a sua solução exacta é impossível por meio dos métodos clássicos de integração é preciso utilizar métodos alternativos, uns analíticos e outros numéricos. Aos primeiros pertencem, precisamente, os métodos de perturbações baseados em desenvolvimentos assimptóticos e aplicáveis a sistemas diferenciais perturbados como o que aqui se trata.

Desde a construção do, possivelmente, mais antigo destes métodos de perturbações, o de Euler-Lagrange (1772), várias foram as ideias aparecidas neste campo. Em 1893 Poincaré levou a cabo a unificação de todos os métodos anteriores com a sua *méthode nouvelle.* As ideias deste último seriam recolhidas por von Zeipel (1916-17) para obter o primeiro método de perturbações implícito em que se utilizavam transformações canónicas com variáveis mescladas, e que seria utilizado para a solução analítica aproximada do problema do satélite zonal por Brouwer (1959). Krylov e Bogoliubov iniciaram, em 1934, uma nova fase na história deste tipo de métodos com o chamado *método de médias*, fundamentado em sucessivas substituições de variáveis e que constituiu um notável avanço neste campo.

Mas será nos anos 60 do passado século quando aparecem novos métodos canónicos de perturbações (Hori, 1966; Deprit, 1969), os quais tentam determinar uma transformação canónica infinitesimal de Lie do tipo

$$x = e^{\varepsilon Y} y = y + \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon^n}{n!} x^{(n)} y \tag{2.1}$$

produzida por uma função geratriz $W(t, x, \varepsilon)$.

As transformações de Lie definem de maneira natural uma classe de transformações canónicas em séries de potências de um pequeno parâmetro. As teorias de perturbações baseadas nesta técnica permitem obter soluções aproximadas de sistemas diferenciais não lineares que se podem tomar como uma perturbação de sistemas integráveis.

A intenção é que o sistema canónico transformado possua algumas propriedades especiais: ser mais facilmente integrável, carecer de alguma das variáveis, ser separável, etc. Como já indicara Deprit (1969), os métodos de perturbações baseados em transformações de Lie apresentam algumas vantagens comparados com os métodos de Poincaré e von Zeipel:

a) As transformações obtêm-se explicitamente a partir de soluções de sistemas canónicos

b) Estas transformações são facilmente inversíveis.

c) As mesmas, também são invariantes sob transformações canónicas finitas.

2.2 Transformação de uma hamiltoniana por meio de um grupo triparamétrico de transformações c-canónicas

Seja um sistema dinâmico de n graus de liberdade definido por uma função hamiltoniana $H = H(\vec{x}, t; \varepsilon)$, onde $\vec{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{X}) \in \mathbb{R}^n \mathrm{x} \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{x}$ são as coordenadas e $\mathbf{X}$ os momentos. O sistema canónico associado que descreve a evolução dinâmica do sistema é

$$\dot{\vec{x}} = J \nabla_{\vec{x}} H \tag{2.2}$$

onde J é a matriz simpléctica $(J^{-1} = J^T = -J)$

$$J = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

com 0_n e I_n as matrizes nula e unidade de ordem n, respectivamente.

Suponhamos que a hamiltoniana se pode desenvolver em série de potências de um parâmetro tridimensional $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ pertencente a uma vizinhança U_0 da origem (0,0,0) de $\mathbb{R}^3$

$$H(\vec{x}, t; \varepsilon) = H_0(\vec{x}, t) + \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m!} [\sum_{k=0}^{m} \sum_{p=0}^{k} \varepsilon_1^p \varepsilon_2^{k-p} \varepsilon_3^{m-k} H_{p,k-p,m-k}(\vec{x}, t)] \tag{2.3}$$

onde

$$H_{p,k-p,m-k}(\vec{x}, t) \equiv \binom{m}{k} \binom{k}{p} \frac{\partial^p}{\partial \varepsilon_1^p} \frac{\partial^{k-p}}{\partial \varepsilon_2^{k-p}} \frac{\partial^{m-k}}{\partial \varepsilon_3^{m-k}} H(\vec{x}, t; 0)$$

Consideremos agora um grupo de Lie triparamétrico de transformações c-canónicas do espaço fásico ampliado $\mathbb{R}^{2n+3}$ da forma

$$\vec{x} = e^{Y_\varepsilon} \vec{y} \tag{2.4}$$

onde o operador Y_ε vem definido através dos parênteses de Poisson como

$$Y_\varepsilon = \{-; W_\varepsilon\} \tag{2.5}$$

sendo $W_\varepsilon(\vec{y}, t)$ o *gerador* ou *função geratriz* da transformação. A sua canonicidade prova-se facilmente observando que é solução das equações de Hamilton de um sistema dinâmico de hamiltoniana W e tempo ε (Ribera, 1981). A função geratriz pode exprimir-se em série de potências

$$W_\varepsilon(\vec{y}, t; \varepsilon) = \varepsilon_1 W^1(\vec{y}, t; \varepsilon_1) + \varepsilon_2 W^2(\vec{y}, t; \varepsilon_2) + \varepsilon_3 W^3(\vec{y}, t; \varepsilon_3) \tag{2.6}$$

Desta maneira podemos escrever Y_ε como

$$Y_\varepsilon = \varepsilon_1 Y_1 + \varepsilon_2 Y_2 + \epsilon_3 Y_3 \tag{2.7}$$

com $Y_i = \{-; W^i\} \quad i = 1, 2, 3.$

Proposição

O transformado da hamiltoniana (2.3) vem dado por

$$\begin{aligned} H^*(\vec{y}, t; \varepsilon) = {} & H_0(\vec{y}, t) + \sum_{m \geq 1} \frac{Y_\varepsilon^m}{m!} H_0(\vec{y}, t) + \\ & + \sum_{m \geq 1} [\frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \sum_{p=0}^{k} \varepsilon_1^p \varepsilon_2^{k-p} \varepsilon_3^{m-k} (H_{p,k-p,m-k}(\vec{y}, t) + \\ & + \sum_{i \geq 1} \frac{Y_\varepsilon^i}{i!} H_{p,k-p,m-k}(\vec{y}, t))] \end{aligned} \tag{2.8}$$

Demonstração:

O desenvolvimento (2.3) pode exprimir-se como

$$H(\vec{x}, t; \varepsilon) = H_0(\vec{x}, t) + \sum_{m \geq 1} F_m(\vec{x}, t; \varepsilon) \tag{2.9}$$

onde

$$F_m(\vec{x},t;\varepsilon) \equiv \frac{1}{m!}[\sum_{k=0}^{m}\sum_{p=0}^{k}\varepsilon_1^p\varepsilon_2^{k-p}\varepsilon_3^{m-k}H_{p,k-p,m-k}(\vec{x},t)] \tag{2.10}$$

Verifica-se facilmente (Ribera, 1981) que $\forall m \geq 1$, a função $F_m(\vec{x},t;\varepsilon)$ é uma função homogénea de grau m nas variáveis $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$.

Também se prova que se F é um campo escalar diferenciável definido sobre $\mathbb{R}^{2n+3}$, o seu transformado é outro campo escalar que se pode escrever na forma

$$F^*(\vec{y},t;\varepsilon) \equiv \sum_{m\geq 0}\frac{Y_\varepsilon^m}{m!}F(\vec{y},t) \tag{2.11}$$

Então, de (2.9) e (2.11) tem-se

$$H^*(\vec{y},t;\varepsilon) = H_0^*(\vec{y},t;\varepsilon) + \sum_{m\geq 1}F_m^*(\vec{y},t;\varepsilon) \tag{2.12}$$

mas também

$$H_0^*(\vec{y},t;\varepsilon) = \sum_{m\geq 0}\frac{Y_\varepsilon^m}{m!}H_0(\vec{y},t) = H_0(\vec{y},t) + \sum_{m\geq 1}\frac{Y_\varepsilon^m}{m!}H_0(\vec{y},t) \tag{2.13}$$

Por outra parte, a partir de (2.10) e (2.11) obtém-se

$$\begin{aligned} F_m^*(\vec{y},t;\varepsilon) &= \frac{1}{m!}[\sum_{k=0}^{m}\sum_{p=0}^{k}\varepsilon_1^p\varepsilon_2^{k-p}\varepsilon_3^{m-k}H_{p,k-p,m-k}^*(\vec{y},t)] = \\ &= \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}\sum_{p=0}^{k}\varepsilon_1^p\varepsilon_2^{k-p}\varepsilon_3^{m-k}[\sum_{i\geq 0}\frac{Y_\varepsilon^i}{i!}H_{p,k-p,m-k}(\vec{y},t)] = \\ &= \frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}\sum_{p=0}^{k}\varepsilon_1^p\varepsilon_2^{k-p}\varepsilon_3^{m-k}[H_{p,k-p,m-k}(\vec{y},t) + \sum_{i\geq 1}\frac{Y_\varepsilon^i}{i!}H_{p,k-p,m-k}(\vec{y},t)] \end{aligned} \tag{2.14}$$

Se agora levamos (2.13) e (2.14) a (2.12) resulta (2.8), tal e como se pretendia demonstrar. §

A chamada *função resto* ou *complementária* da transformação canónica não conservativa é

$$R(\vec{y},t;\varepsilon) = -\sum_{k\geq 1} \frac{Y_\varepsilon^{k-1}}{k!} W_{\varepsilon t} \tag{2.15}$$

onde

$$W_{\varepsilon t} \equiv \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial t} \tag{2.16}$$

Esta função resto verifica

$$\nabla_{\vec{y}} R = -J\vec{y}_t \tag{2.17}$$

Uma vez realizada a transformação o novo sistema canónico que se obtém é

$$\dot{\vec{y}} = J\nabla_{\vec{y}} K \tag{2.18}$$

onde a função hamiltoniana vem dada por

$$K(\vec{y},t;\varepsilon) = H^*(\vec{y},t;\varepsilon) + R(\vec{y},t;\varepsilon) \tag{2.19}$$

que, tal e como se viu, se pode desenvolver em série de potências dos parâmetros como

$$K(\vec{y},t;\varepsilon) = K_0(\vec{y},t) + \sum_{m\geq 1} \frac{1}{m!} [\sum_{k=0}^{m} \sum_{p=0}^{k} \varepsilon_1^p \varepsilon_2^{k-p} \varepsilon_3^{m-k} K_{p,k-p,m-k}(\vec{y},t)] \tag{2.20}$$

2.3 Desenvolvimento da função geratriz em série de potências dos três parâmetros

Suponhamos que as componentes W^i da função geratriz W_ε se podem desenvolver em série de potências das componentes do parâmetro tridimensional $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ tal e como vimos em (2.6)

$$W_\varepsilon(\vec{y}, t; \varepsilon) = \varepsilon_1 W^1(\vec{y}, t; \varepsilon_1) + \varepsilon_2 W^2(\vec{y}, t; \varepsilon_2) + \varepsilon_3 W^3(\vec{y}, t; \varepsilon_3) \tag{2.21}$$

onde

$$W^i(\vec{y}, t; \varepsilon_i) = \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon_i^n}{n!} W^i_{n+1}(\vec{y}, t) \qquad\qquad i = 1, 2, 3 \tag{2.22}$$

Tendo em conta tudo o anterior podemos expressar o operador Y_ε como

$$\begin{aligned} Y_\varepsilon = \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i \{-; W^i\} &= \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i \{-; \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon_i^n}{n!} W^i_{n+1}\} = \\ &= \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon_i^n}{n!} \{-; W^i_{n+1}\} = \\ &= \sum_{i=1}^{3} \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon_i^{n+1}}{n!} \{-; W^i_{n+1}\} \end{aligned} \tag{2.23}$$

ou também na forma

$$Y_\varepsilon = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j \geq 0} \frac{\varepsilon_i^{j+1}}{j!} L^i_{j+1} \tag{2.24}$$

se definimos o *operador de Lie*

$$L_i^j = \{-; W_j^i\} \tag{2.25}$$

Em geral temos

$$L^{i_1, \ldots, i_n}_{j_1, \ldots, j_n} = \{\{\ldots\{-; W^{i_n}_{j_n}\}; \ldots\}; W^{i_1}_{j_1}\} \tag{2.26}$$

Para o mesmo caso também se demonstra facilmente por indução que

$$Y_\varepsilon^n = \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{3} \sum_{j_1+\dots+j_n\geq n} \frac{\varepsilon_{i_1}^{j_1+1}\varepsilon_{i_2}^{j_2+1}\dots\varepsilon_{i_n}^{j_n+1}}{j_1!j_2!\dots j_n!} L_{j_1+1,j_2+1,\dots,j_n+1}^{i_1,i_2,\dots,i_n} \tag{2.27}$$

Particularizando para três parâmetros obtemos, com n=1,2,3 até à terceira ordem, as relações

$$Y_\varepsilon^1 = \varepsilon_1 L_1^1 + \varepsilon_2 L_1^2 + \varepsilon_3 L_1^3 + \varepsilon_1^2 L_2^1 + \varepsilon_2^2 L_2^2 + \varepsilon_3^2 L_2^3 + \frac{\varepsilon_1^3}{2} L_3^1 + \frac{\varepsilon_2^3}{2} L_3^2 + \frac{\varepsilon_3^3}{2} L_3^3 + \dots \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} Y_\varepsilon^2 = {} & \varepsilon_1^2 L_{11}^{11} + \varepsilon_1\varepsilon_2 L_{11}^{12} + \varepsilon_2\varepsilon_1 L_{11}^{21} + \varepsilon_1\varepsilon_3 L_{11}^{13} + \varepsilon_3\varepsilon_1 L_{11}^{31} + \varepsilon_2^2 L_{11}^{22} + \varepsilon_2\varepsilon_3 L_{11}^{23} + \\ & + \varepsilon_3\varepsilon_2 L_{11}^{32} + \varepsilon_3^2 L_{11}^{33} + \varepsilon_1^3 L_{21}^{11} + \varepsilon_1^3 L_{12}^{11} + \varepsilon_1^2\varepsilon_2 L_{21}^{12} + \varepsilon_1\varepsilon_2^2 L_{12}^{12} + \varepsilon_2^2\varepsilon_1 L_{21}^{21} + \\ & + \varepsilon_2\varepsilon_1^2 L_{12}^{21} + \varepsilon_1^2\varepsilon_3 L_{21}^{13} + \varepsilon_1\varepsilon_3^2 L_{12}^{13} + \varepsilon_3^2\varepsilon_1 L_{21}^{31} + \varepsilon_3\varepsilon_1^2 L_{12}^{31} + \varepsilon_2^3 L_{21}^{22} + \varepsilon_2^3 L_{12}^{22} + \\ & + \varepsilon_2^2\varepsilon_3 L_{21}^{23} + \varepsilon_2\varepsilon_3^2 L_{12}^{23} + \varepsilon_3^2\varepsilon_2 L_{21}^{32} + \varepsilon_3\varepsilon_2^2 L_{12}^{32} + \varepsilon_3^3 L_{21}^{33} + \varepsilon_3^3 L_{12}^{33} + \dots \end{aligned} \tag{2.29}$$

$$\begin{aligned} Y_\varepsilon^3 = {} & \varepsilon_1^3 L_{111}^{111} + \varepsilon_2\varepsilon_1^2 L_{111}^{211} + \varepsilon_1^2\varepsilon_2 L_{111}^{121} + \varepsilon_1^2\varepsilon_2 L_{111}^{112} + \varepsilon_2^3 L_{111}^{222} + \varepsilon_1\varepsilon_2^2 L_{111}^{122} + \\ & + \varepsilon_2^2\varepsilon_1 L_{111}^{212} + \varepsilon_2^2\varepsilon_1 L_{111}^{221} + \varepsilon_3\varepsilon_1^2 L_{111}^{311} + \varepsilon_1^2\varepsilon_3 L_{111}^{131} + \varepsilon_1^2\varepsilon_3 L_{111}^{113} + \varepsilon_3^2\varepsilon_1 L_{111}^{331} + \\ & + \varepsilon_3^2\varepsilon_1 L_{111}^{313} + \varepsilon_1\varepsilon_3^2 L_{111}^{133} + \varepsilon_3^3 L_{111}^{333} + \varepsilon_2^2\varepsilon_3 L_{111}^{223} + \varepsilon_2^2\varepsilon_3 L_{111}^{232} + \varepsilon_3\varepsilon_2^2 L_{111}^{322} + \\ & + \varepsilon_3^2\varepsilon_2 L_{111}^{332} + \varepsilon_3^2\varepsilon_2 L_{111}^{323} + \varepsilon_2\varepsilon_3^2 L_{111}^{233} + \dots \end{aligned} \tag{2.30}$$

Substituindo estas expressões em (2.8) e (2.15) obtêm-se, a terceira ordem, as expressões para a função hamiltoniana transformada e para a função resto, respectivamente

$$\begin{aligned} H^*(\vec{y},t;\varepsilon) = {} & H_0 + \varepsilon_1(L_1^1 H_0 + H_{100}) + \varepsilon_2(L_1^2 H_0 + H_{010}) + \\ & + \varepsilon_3(L_1^3 H_0 + H_{001}) + \varepsilon_1^2(L_2^1 H_0 + \frac{1}{2} L_{11}^{11} H_0 + L_1^1 H_{100} + \\ & + \frac{1}{2} H_{200}) + \varepsilon_2^2(L_2^2 H_0 + \frac{1}{2} L_{11}^{22} H_0 + L_1^2 H_{010} + \frac{1}{2} H_{020}) + \\ & + \varepsilon_3^2(L_2^3 H_0 + \frac{1}{2} L_{11}^{33} H_0 + L_1^3 H_{001} + \frac{1}{2} H_{002}) + \varepsilon_1\varepsilon_2(\frac{1}{2} L_{11}^{12} H_0 + \\ & + \frac{1}{2} L_{11}^{21} H_0 + L_1^1 H_{010} + L_1^2 H_{100} + \frac{1}{2} H_{110}) + \varepsilon_1\varepsilon_3(\frac{1}{2} L_{11}^{13} H_0 + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}L^{31}_{11}H_0+L^1_1H_{001}+L^3_1H_{100}+\frac{1}{2}H_{101})+\varepsilon_2\varepsilon_3(\frac{1}{2}L^{23}_{11}H_0+\\
&+\frac{1}{2}L^{32}_{11}H_0+L^2_1H_{001}+L^3_1H_{010}+\frac{1}{2}H_{011})+\varepsilon_1^3(\frac{1}{2}L^1_3H_0+\\
&+\frac{1}{2}L^{11}_{12}H_0+\frac{1}{2}L^{11}_{21}H_0+\frac{1}{6}L^{111}_{111}H_0+L^1_2H_{100}+\frac{1}{2}L^{11}_{11}H_{100}+\\
&+\frac{1}{2}L^1_1H_{200}+\frac{1}{6}H_{300})+\varepsilon_2^3(\frac{1}{2}L^2_3H_0+\frac{1}{2}L^{22}_{12}H_0+\frac{1}{2}L^{22}_{21}H_0+\\
&+\frac{1}{6}L^{222}_{111}H_0+L^2_2H_{010}+\frac{1}{2}L^{22}_{11}H_{010}+\frac{1}{2}L^2_1H_{020}+\frac{1}{6}H_{030})+\\
&+\varepsilon_3^3(\frac{1}{2}L^3_3H_0+\frac{1}{2}L^{33}_{12}H_0+\frac{1}{2}L^{33}_{21}H_0+\frac{1}{6}L^{333}_{111}H_0+L^3_2H_{001}+\\
&+\frac{1}{2}L^{33}_{11}H_{001}+\frac{1}{2}L^3_1H_{002}+\frac{1}{6}H_{003})+\varepsilon_1^2\varepsilon_2(\frac{1}{2}L^{21}_{12}H_0+\frac{1}{2}L^{12}_{21}H_0+\\
&+\frac{1}{6}L^{112}_{111}H_0+\frac{1}{6}L^{121}_{111}H_0+\frac{1}{6}L^{211}_{111}H_0+L^1_2H_{010}+\frac{1}{2}L^{11}_{11}H_{010}+\\
&+\frac{1}{2}L^{12}_{11}H_{100}+\frac{1}{2}L^{21}_{11}H_{100}+\frac{1}{2}L^1_1H_{110}+\frac{1}{2}L^2_1H_{200}+\frac{1}{6}H_{210})+\\
&+\varepsilon_1^2\varepsilon_3(\frac{1}{2}L^{31}_{12}H_0+\frac{1}{2}L^{13}_{21}H_0+\frac{1}{6}L^{113}_{111}H_0+\frac{1}{6}L^{131}_{111}H_0+\frac{1}{6}L^{311}_{111}H_0+\\
&+L^1_2H_{001}+\frac{1}{2}L^{11}_{11}H_{001}+\frac{1}{2}L^{13}_{11}H_{100}+\frac{1}{2}L^{31}_{11}H_{100}+\frac{1}{2}L^1_1H_{101}+\\
&+\frac{1}{2}L^3_1H_{200}+\frac{1}{6}H_{201})+\varepsilon_1\varepsilon_2^2(\frac{1}{2}L^{12}_{12}H_0+\frac{1}{2}L^{21}_{21}H_0+\frac{1}{6}L^{122}_{111}H_0+\\
&+\frac{1}{6}L^{212}_{111}H_0+\frac{1}{6}L^{221}_{111}H_0+L^{12}_{11}H_{010}+\frac{1}{2}L^{21}_{11}H_{010}+\frac{1}{2}L^1_1H_{020}+\\
&+\frac{1}{2}L^2_2H_{100}+\frac{1}{2}L^{22}_{11}H_{100}+\frac{1}{2}L^2_1H_{110}+\frac{1}{6}H_{120})+\varepsilon_2^2\varepsilon_3(\frac{1}{2}L^{32}_{12}H_0+\\
&+\frac{1}{2}L^{23}_{21}H_0+\frac{1}{6}L^{223}_{111}H_0+\frac{1}{6}L^{232}_{111}H_0+\frac{1}{6}L^{322}_{111}H_0+L^2_2H_{001}+\\
&+\frac{1}{2}L^{22}_{11}H_{001}+\frac{1}{2}L^{23}_{11}H_{010}+\frac{1}{2}L^{32}_{11}H_{010}+\frac{1}{2}L^2_1H_{011}+\frac{1}{2}L^3_1H_{020}+\frac{1}{6}H_{021})+\\
&+\varepsilon_1\varepsilon_3^2(\frac{1}{2}L^{13}_{12}H_0+\frac{1}{2}L^{31}_{21}H_0+\frac{1}{6}L^{133}_{111}H_0+\frac{1}{6}L^{313}_{111}H_0+\frac{1}{6}L^{331}_{111}H_0+\\
&+L^{13}_{11}H_{001}+\frac{1}{2}L^{31}_{11}H_{001}+\frac{1}{2}L^1_1H_{002}+\frac{1}{2}L^3_2H_{100}+\frac{1}{2}L^{33}_{11}H_{100}+\\
&+\frac{1}{2}L^3_1H_{101}+\frac{1}{6}H_{102})+\varepsilon_2\varepsilon_3^2(\frac{1}{2}L^{23}_{12}H_0+\frac{1}{2}L^{32}_{21}H_0+\frac{1}{6}L^{233}_{111}H_0+\\
&+\frac{1}{6}L^{323}_{111}H_0+\frac{1}{6}L^{332}_{111}H_0+L^{23}_{11}H_{001}+\frac{1}{2}L^{32}_{11}H_{001}+\frac{1}{2}L^2_1H_{002}+\\
&+\frac{1}{2}L^3_2H_{010}+\frac{1}{2}L^{33}_{11}H_{010}+\frac{1}{2}L^3_1H_{011}+\frac{1}{6}H_{012})+\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(\frac{1}{6}L^{123}_{111}H_0+\\
&+\frac{1}{6}L^{132}_{111}H_0+\frac{1}{6}L^{213}_{111}H_0+\frac{1}{6}L^{231}_{111}H_0+\frac{1}{6}L^{312}_{111}H_0+\frac{1}{6}L^{321}_{111}H_0+\frac{1}{2}L^{12}_{11}H_{001}+
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{2}L^{21}_{11}H_{001}+\frac{1}{2}L^{13}_{11}H_{010}+\frac{1}{2}L^{31}_{11}H_{010}+\frac{1}{2}L^{1}_{1}H_{011}+\frac{1}{2}L^{23}_{11}H_{100}+\frac{1}{2}L^{32}_{11}H_{100}+$$
$$+\frac{1}{2}L^{2}_{1}H_{101}+\frac{1}{2}L^{3}_{1}H_{110}+\frac{1}{6}H_{111}) \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}
R(\vec{y},t;\varepsilon) = {} & \varepsilon_1 W^1_{1t}+\varepsilon_2 W^2_{1t}+\varepsilon_3 W^3_{1t}+\varepsilon_1^2(\frac{1}{2}L^1_1W^1_{1t}+W^1_{2t})+\varepsilon_2^2(\frac{1}{2}L^2_1W^2_{1t}+ \\
& + W^2_{2t})+\varepsilon_3^2(\frac{1}{2}L^3_1W^3_{1t}+W^3_{2t})+\varepsilon_1\varepsilon_2(\frac{1}{2}L^2_1W^1_{1t}+L^1_1W^2_{1t})+ \\
& +\varepsilon_1\varepsilon_3(\frac{1}{2}L^3_1W^1_{1t}+L^1_1W^3_{1t})+\varepsilon_2\varepsilon_3(\frac{1}{2}L^3_1W^2_{1t}+L^2_1W^3_{1t})+ \\
& +\varepsilon_1^3(\frac{1}{2}L^1_2W^1_{1t}+\frac{1}{2}L^1_1W^1_{2t}+\frac{1}{2}W^1_{3t}+\frac{1}{6}W^1_{1t}L^{11}_{11})+ \\
& +\varepsilon_2^3(\frac{1}{2}L^2_2W^2_{1t}+\frac{1}{2}L^2_1W^2_{2t}+\frac{1}{2}W^2_{3t}+\frac{1}{6}W^2_{1t}L^{22}_{11})+ \\
& +\varepsilon_3^3(\frac{1}{2}L^3_2W^3_{1t}+\frac{1}{2}L^3_1W^3_{2t}+\frac{1}{2}W^3_{3t}+\frac{1}{6}W^3_{1t}L^{33}_{11})+ \\
& +\varepsilon_1^2\varepsilon_2(\frac{1}{2}L^1_2W^2_{1t}+\frac{1}{2}L^2_1W^1_{2t}+\frac{1}{6}W^2_{1t}L^{11}_{11}+\frac{1}{6}W^1_{1t}L^{12}_{11}+\frac{1}{6}W^1_{1t}L^{21}_{11})+ \\
& +\varepsilon_1^2\varepsilon_3(\frac{1}{2}L^1_2W^3_{1t}+\frac{1}{2}L^3_1W^1_{2t}+\frac{1}{6}W^3_{1t}L^{11}_{11}+\frac{1}{6}W^1_{1t}L^{13}_{11}+\frac{1}{6}W^1_{1t}L^{31}_{11})+ \\
& +\varepsilon_1\varepsilon_2^2(\frac{1}{2}L^2_2W^1_{1t}+\frac{1}{2}L^1_1W^2_{2t}+\frac{1}{6}W^2_{1t}L^{12}_{11}+\frac{1}{6}W^2_{1t}L^{21}_{11}+\frac{1}{6}W^1_{1t}L^{22}_{11})+ \\
& +\varepsilon_2^2\varepsilon_3(\frac{1}{2}L^2_2W^3_{1t}+\frac{1}{2}L^3_1W^2_{2t}+\frac{1}{6}W^3_{1t}L^{22}_{11}+\frac{1}{6}W^2_{1t}L^{23}_{11}+\frac{1}{6}W^2_{1t}L^{32}_{11})+ \\
& +\varepsilon_1\varepsilon_3^2(\frac{1}{2}L^3_2W^1_{1t}+\frac{1}{2}L^1_1W^3_{2t}+\frac{1}{6}W^3_{1t}L^{13}_{11}+\frac{1}{6}W^3_{1t}L^{31}_{11}+\frac{1}{6}W^1_{1t}L^{33}_{11})+ \\
& +\varepsilon_2\varepsilon_3^2(\frac{1}{2}L^3_2W^2_{1t}+\frac{1}{2}L^2_1W^3_{2t}+\frac{1}{6}W^3_{1t}L^{23}_{11}+\frac{1}{6}W^3_{1t}L^{32}_{11}+\frac{1}{6}W^2_{1t}L^{33}_{11})+ \\
& +\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(\frac{1}{6}W^3_{1t}L^{12}_{11}+\frac{1}{6}W^2_{1t}L^{13}_{11}+\frac{1}{6}W^3_{1t}L^{21}_{11}+\frac{1}{6}W^1_{1t}L^{23}_{11}+\frac{1}{6}W^2_{1t}L^{31}_{11}+ \\
& +\frac{1}{6}W^1_{1t}L^{32}_{11})
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Por outra parte, a nova função hamiltoniana a terceira ordem será:

$$\begin{aligned}
K(\vec{y},t;\varepsilon) = {} & K_0+\varepsilon_1K_{100}+\varepsilon_2K_{010}+\varepsilon_3K_{001}+\frac{1}{2}\varepsilon_1^2K_{200}+\frac{1}{2}\varepsilon_2^2K_{020}+ \\
& +\frac{1}{2}\varepsilon_3^2K_{002}+\frac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_2K_{110}+\frac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_3K_{101}+\frac{1}{2}\varepsilon_2\varepsilon_3K_{011}+\frac{1}{6}\varepsilon_1^3K_{300}+ \\
& +\frac{1}{6}\varepsilon_2^3K_{030}+\frac{1}{6}\varepsilon_3^3K_{003}+\frac{1}{6}\varepsilon_1^2\varepsilon_2K_{210}+\frac{1}{6}\varepsilon_1^2\varepsilon_3K_{201}+\frac{1}{6}\varepsilon_1\varepsilon_2^2K_{120}+ \\
& +\frac{1}{6}\varepsilon_2^2\varepsilon_3K_{021}+\frac{1}{6}\varepsilon_1\varepsilon_3^2K_{102}+\frac{1}{6}\varepsilon_2\varepsilon_3^2K_{012}+\frac{1}{6}\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3K_{111}
\end{aligned} \tag{2.33}$$

2.4 Equações do método

Finalmente, temos que substituir as expressões (2.31), (2.32) e (2.33) na relação (2.19) e igualar os termos da mesma ordem. Obtém-se assim uma série de equações que constituem as chamadas *equações do método*

Termo independente:

$$H_0 = K_0 \tag{2.34}$$

Coeficiente ε_1:

$$L_1^1 H_0 + H_{100} + W_{1t}^1 = K_{100} \tag{2.35}$$

Coeficiente ε_2:

$$L_1^2 H_0 + H_{010} + W_{1t}^2 = K_{010} \tag{2.36}$$

Coeficiente ε_3:

$$L_1^3 H_0 + H_{001} + W_{1t}^3 = K_{001} \tag{2.37}$$

Coeficiente ε_1^2:

$$L_2^1 H_0 + \frac{1}{2} L_{11}^{11} H_0 + L_1^1 H_{100} + \frac{1}{2} H_{200} + \frac{1}{2} L_1^1 W_{1t}^1 + W_{2t}^1 = \frac{1}{2} K_{200} \tag{2.38}$$

Coeficiente ε_2^2:

$$L_2^2 H_0 + \frac{1}{2} L_{11}^{22} H_0 + L_1^2 H_{010} + \frac{1}{2} H_{020} + \frac{1}{2} L_1^2 W_{1t}^2 + W_{2t}^2 = \frac{1}{2} K_{020} \tag{2.39}$$

Coeficiente ε_3^2:

$$L_2^3 H_0 + \frac{1}{2} L_{11}^{33} H_0 + L_1^3 H_{001} + \frac{1}{2} H_{002} + \frac{1}{2} L_1^3 W_{1t}^3 + W_{2t}^3 = \frac{1}{2} K_{002} \tag{2.40}$$

Coeficiente $\varepsilon_1 \varepsilon_2$:

$$\frac{1}{2}L_{11}^{12}H_0 + \frac{1}{2}L_{11}^{21}H_0 + L_1^1H_{010} + L_1^2H_{100} + \frac{1}{2}H_{110} + \frac{1}{2}L_1^2W_{1t}^1 + L_1^1W_{1t}^2 = \frac{1}{2}K_{110} \quad (2.41)$$

Coeficiente $\varepsilon_1\varepsilon_3$:

$$\frac{1}{2}L_{11}^{13}H_0 + \frac{1}{2}L_{11}^{31}H_0 + L_1^1H_{001} + L_1^3H_{100} + \frac{1}{2}H_{101} + \frac{1}{2}L_1^3W_{1t}^1 + L_1^1W_{1t}^3 = \frac{1}{2}K_{101} \quad (2.42)$$

Coeficiente $\varepsilon_2\varepsilon_3$:

$$\frac{1}{2}L_{11}^{23}H_0 + \frac{1}{2}L_{11}^{32}H_0 + L_1^2H_{001} + L_1^3H_{010} + \frac{1}{2}H_{011} + \frac{1}{2}L_1^3W_{1t}^2 + L_1^2W_{1t}^3 = \frac{1}{2}K_{011} \quad (2.43)$$

Coeficiente ε_1^3:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}L_3^1H_0 + \frac{1}{2}L_{12}^{11}H_0 + \frac{1}{2}L_{21}^{11}H_0 + \frac{1}{6}L_{111}^{111}H_0 + L_2^1H_{100} + \\
&\quad + \frac{1}{2}L_{11}^{11}H_{100} + \frac{1}{2}L_1^1H_{200} + \frac{1}{6}H_{300} + \frac{1}{2}L_2^1W_{1t}^1 + \frac{1}{2}L_1^1W_{2t}^1 + \\
&\quad + \frac{1}{2}W_{3t}^1 + \frac{1}{6}W_{1t}^1L_{11}^{11} = \frac{1}{6}K_{300}
\end{aligned} \quad (2.44)$$

Coeficiente ε_2^3:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}L_3^2H_0 + \frac{1}{2}L_{12}^{22}H_0 + \frac{1}{2}L_{21}^{22}H_0 + \frac{1}{6}L_{111}^{222}H_0 + L_2^2H_{010} + \\
&\quad + \frac{1}{2}L_{11}^{22}H_{010} + \frac{1}{2}L_1^2H_{020} + \frac{1}{6}H_{030} + \frac{1}{2}L_2^2W_{1t}^2 + \frac{1}{2}L_1^2W_{2t}^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2}W_{3t}^2 + \frac{1}{6}W_{1t}^2L_{11}^{22} = \frac{1}{6}K_{030}
\end{aligned} \quad (2.45)$$

Coeficiente ε_3^3:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}L_3^3H_0 + \frac{1}{2}L_{12}^{33}H_0 + \frac{1}{2}L_{21}^{33}H_0 + \frac{1}{6}L_{111}^{333}H_0 + L_2^3H_{001} + \\
&\quad + \frac{1}{2}L_{11}^{33}H_{001} + \frac{1}{2}L_1^3H_{002} + \frac{1}{6}H_{003} + \frac{1}{2}L_2^3W_{1t}^3 + \frac{1}{2}L_1^3W_{2t}^3 + \\
&\quad + \frac{1}{2}W_{3t}^3 + \frac{1}{6}W_{1t}^3L_{11}^{33} = \frac{1}{6}K_{003}
\end{aligned} \quad (2.46)$$

Coeficiente $\varepsilon_1^2\varepsilon_2$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}L_{12}^{21}H_0 + \frac{1}{2}L_{21}^{12}H_0 + \frac{1}{6}L_{111}^{112}H_0 + \frac{1}{6}L_{111}^{121}H_0 + \frac{1}{6}L_{111}^{211}H_0 + \\
&\quad + L_2^1 H_{010} + \frac{1}{2}L_{11}^{11}H_{010} + \frac{1}{2}L_{11}^{12}H_{100} + \frac{1}{2}L_{11}^{21}H_{100} + \frac{1}{2}L_1^1 H_{110} + \\
&\quad + \frac{1}{2}L_1^2 H_{200} + \frac{1}{6}H_{210} + \frac{1}{2}L_2^1 W_{1t}^2 + \frac{1}{2}L_1^2 W_{2t}^1 + \frac{1}{6}W_{1t}^2 L_{11}^{11} + \\
&\quad + \frac{1}{6}W_{1t}^1 L_{11}^{12} + \frac{1}{6}W_{1t}^1 L_{11}^{21} = \frac{1}{6}K_{210}
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Coeficiente $\varepsilon_1^2\varepsilon_3$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}L_{12}^{31}H_0 + \frac{1}{2}L_{21}^{13}H_0 + \frac{1}{6}L_{111}^{113}H_0 + \frac{1}{6}L_{111}^{131}H_0 + \frac{1}{6}L_{111}^{311}H_0 + \\
&\quad + L_2^1 H_{001} + \frac{1}{2}L_{11}^{11}H_{001} + \frac{1}{2}L_{11}^{13}H_{100} + \frac{1}{2}L_{11}^{31}H_{100} + \frac{1}{2}L_1^1 H_{101} + \\
&\quad + \frac{1}{2}L_1^3 H_{200} + \frac{1}{6}H_{201} + \frac{1}{2}L_2^1 W_{1t}^3 + \frac{1}{2}L_1^3 W_{2t}^1 + \frac{1}{6}W_{1t}^3 L_{11}^{11} + \\
&\quad + \frac{1}{6}W_{1t}^1 L_{11}^{13} + \frac{1}{6}W_{1t}^1 L_{11}^{31} = \frac{1}{6}K_{201}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Coeficiente $\varepsilon_1\varepsilon_2^2$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}L_{12}^{12}H_0 + \frac{1}{2}L_{21}^{21}H_0 + \frac{1}{6}L_{111}^{122}H_0 + \frac{1}{6}L_{111}^{212}H_0 + \frac{1}{6}L_{111}^{221}H_0 + \\
&\quad + L_2^2 H_{100} + \frac{1}{2}L_{11}^{12}H_{010} + \frac{1}{2}L_{11}^{21}H_{010} + \frac{1}{2}L_{11}^{22}H_{100} + \frac{1}{2}L_1^1 H_{020} + \\
&\quad + \frac{1}{2}L_1^2 H_{110} + \frac{1}{6}H_{120} + \frac{1}{2}L_2^2 W_{1t}^1 + \frac{1}{2}L_1^1 W_{2t}^2 + \frac{1}{6}W_{1t}^2 L_{11}^{12} + \\
&\quad + \frac{1}{6}W_{1t}^2 L_{11}^{21} + \frac{1}{6}W_{1t}^1 L_{11}^{22} = \frac{1}{6}K_{120}
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Coeficiente $\varepsilon_2^2\varepsilon_3$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}L_{12}^{32}H_0 + \frac{1}{2}L_{21}^{23}H_0 + \frac{1}{6}L_{111}^{223}H_0 + \frac{1}{6}L_{111}^{232}H_0 + \frac{1}{6}L_{111}^{322}H_0 + \\
&\quad + L_2^2 H_{001} + \frac{1}{2}L_{11}^{22}H_{001} + \frac{1}{2}L_{11}^{23}H_{010} + \frac{1}{2}L_{11}^{32}H_{010} + \frac{1}{2}L_1^2 H_{011} +
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}L_1^3H_{020}+\frac{1}{6}H_{021}+\frac{1}{2}L_2^2W_{1t}^3+\frac{1}{2}L_1^3W_{2t}^2+\frac{1}{6}W_{1t}^3L_{11}^{22}+$$
$$+\frac{1}{6}W_{1t}^2L_{11}^{23}+\frac{1}{6}W_{1t}^2L_{11}^{32}=\frac{1}{6}K_{021} \tag{2.50}$$

Coeficiente $\varepsilon_1\varepsilon_3^2$:

$$\frac{1}{2}L_{12}^{13}H_0+\frac{1}{2}L_{21}^{31}H_0+\frac{1}{6}L_{111}^{133}H_0+\frac{1}{6}L_{111}^{313}H_0+\frac{1}{6}L_{111}^{331}H_0+$$
$$+L_2^3H_{100}+\frac{1}{2}L_{11}^{13}H_{001}+\frac{1}{2}L_{11}^{31}H_{001}+\frac{1}{2}L_{11}^{33}H_{100}+\frac{1}{2}L_1^1H_{002}+$$
$$+\frac{1}{2}L_1^3H_{101}+\frac{1}{6}H_{102}+\frac{1}{2}L_2^3W_{1t}^1+\frac{1}{2}L_1^1W_{2t}^3+\frac{1}{6}W_{1t}^3L_{11}^{13}+$$
$$+\frac{1}{6}W_{1t}^3L_{11}^{31}+\frac{1}{6}W_{1t}^1L_{11}^{33}=\frac{1}{6}K_{102} \tag{2.51}$$

Coeficiente $\varepsilon_2\varepsilon_3^2$:

$$\frac{1}{2}L_{12}^{23}H_0+\frac{1}{2}L_{21}^{32}H_0+\frac{1}{6}L_{111}^{233}H_0+\frac{1}{6}L_{111}^{323}H_0+\frac{1}{6}L_{111}^{332}H_0+$$
$$+L_1^2H_{002}+\frac{1}{2}L_{11}^{23}H_{001}+\frac{1}{2}L_{11}^{32}H_{001}+\frac{1}{2}L_{11}^{33}H_{010}+\frac{1}{2}L_2^3H_{010}+$$
$$+\frac{1}{2}L_1^3H_{011}+\frac{1}{6}H_{012}+\frac{1}{2}L_2^3W_{1t}^2+\frac{1}{2}L_1^2W_{2t}^3+\frac{1}{6}W_{1t}^3L_{11}^{23}+$$
$$+\frac{1}{6}W_{1t}^3L_{11}^{32}+\frac{1}{6}W_{1t}^2L_{11}^{33}=\frac{1}{6}K_{012} \tag{2.52}$$

Coeficiente $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$:

$$\frac{1}{6}L_{111}^{123}H_0+\frac{1}{6}L_{111}^{132}H_0+\frac{1}{6}L_{111}^{213}H_0+\frac{1}{6}L_{111}^{231}H_0+\frac{1}{6}L_{111}^{312}H_0+$$
$$+\frac{1}{6}L_{111}^{321}H_0+\frac{1}{2}L_{11}^{12}H_{001}+\frac{1}{2}L_{11}^{21}H_{001}+\frac{1}{2}L_{11}^{13}H_{010}+\frac{1}{2}L_{11}^{31}H_{010}+$$
$$+\frac{1}{2}L_1^1H_{011}+\frac{1}{2}L_{11}^{23}H_{100}+\frac{1}{2}L_{11}^{32}H_{100}+\frac{1}{2}L_1^2H_{101}+\frac{1}{2}L_1^3H_{110}+$$
$$+\frac{1}{6}H_{111}+\frac{1}{6}W_{1t}^3L_{11}^{12}+\frac{1}{6}W_{1t}^2L_{11}^{13}+\frac{1}{6}W_{1t}^3L_{11}^{21}+\frac{1}{6}W_{1t}^1L_{11}^{23}+$$
$$+\frac{1}{6}W_{1t}^2L_{11}^{31}+\frac{1}{6}W_{1t}^1L_{11}^{32}=\frac{1}{6}K_{111} \tag{2.53}$$

A partir das relações correspondentes aos termos puros (2.34-2.40, 2.44-2.46) obtêm-se as referidas equações do método

$$
\begin{aligned}
&H_0(\vec{y},t) = K_0(\vec{y},t)\\
&n[\{H_0;W_n^1\} + \frac{\partial W_n^1}{\partial t}] = K_{n00} - A_{n00}\\
&n[\{H_0;W_n^2\} + \frac{\partial W_n^2}{\partial t}] = K_{0n0} - A_{0n0}\\
&n[\{H_0;W_n^3\} + \frac{\partial W_n^3}{\partial t}] = K_{00n} - A_{00n}
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

onde, até à terceira ordem, definimos

$$
\begin{aligned}
&A_{100} = H_{100}\\
&A_{010} = H_{010}\\
&A_{001} = H_{001}\\
&A_{200} = H_{200} + \{K_{100} + H_{100}; W_1^1\}\\
&A_{020} = H_{020} + \{K_{010} + H_{010}; W_1^2\}\\
&A_{002} = H_{002} + \{K_{001} + H_{001}; W_1^3\}\\
&A_{300} = H_{300} + 3\{K_{100} + H_{100}; W_2^1\} + \frac{3}{2}\{K_{200} + H_{200}; W_1^1\} +\\
&+ \frac{1}{2}\{\{H_{100} - K_{100}; W_1^1\}; W_1^1\}\\
&A_{030} = H_{030} + 3\{K_{010} + H_{010}; W_2^2\} + \frac{3}{2}\{K_{020} + H_{020}; W_1^2\} +\\
&+ \frac{1}{2}\{\{H_{010} - K_{010}; W_1^2\}; W_1^2\}\\
&A_{003} = H_{003} + 3\{K_{001} + H_{001}; W_2^3\} + \frac{3}{2}\{K_{002} + H_{002}; W_1^3\} +\\
&+ \frac{1}{2}\{\{H_{001} - K_{001}; W_1^3\}; W_1^3\}
\end{aligned}
\tag{2.55}
$$

As equações (2.54) fornecem-nos sucessivamente os termos da função geratriz W_n^1, W_n^2 e W_n^3, após termos elegido convenientemente os termos da nova função hamiltoniana K_{n00}, K_{0n0} e K_{00n}.

Ao trabalharmos com mais de um parâmetro produzem-se termos mistos que fazem que a eleição da nova função hamiltoniana se deva realizar cuidadosamente. É precisamente a partir dos coeficientes (2.41-2.43, 2.47-2.53) donde se obtêm as relações que determinam os termos mistos da nova função hamiltoniana. Estes vêm dados por

$$
\begin{aligned}
&K_{110} = L_1^2(K_{100} + H_{100}) + L_1^1(K_{010} + H_{010}) + H_{110} \\
&K_{101} = L_1^3(K_{100} + H_{100}) + L_1^1(K_{001} + H_{001}) + H_{101} \\
&K_{011} = L_1^3(K_{010} + H_{010}) + L_1^2(K_{001} + H_{001}) + H_{011} \\
&K_{210} = 3L_{11}^{21}H_0 + 3L_{21}^{12}H_0 + L_{111}^{112}H_0 + L_{111}^{121}H_0 + L_{111}^{211}H_0 + 6L_2^1H_{010} + \\
&+ 3L_{11}^{11}H_{010} + 3L_{11}^{12}H_{100} + 3L_{11}^{21}H_{100} + 3L_1^1H_{110} + 3L_1^2H_{200} + H_{210} + \\
&+ 3L_2^1W_{1t}^2 + 3L_1^2W_{2t}^1 + W_{1t}^2L_{11}^{11} + W_{1t}^1L_{11}^{12} + W_{1t}^1L_{11}^{21} \\
&K_{201} = 3L_{12}^{31}H_0 + 3L_{21}^{13}H_0 + L_{111}^{113}H_0 + L_{111}^{131}H_0 + L_{111}^{311}H_0 + 6L_2^1H_{001} + \\
&+ 3L_{11}^{11}H_{001} + 3L_{11}^{13}H_{100} + 3L_{11}^{31}H_{100} + 3L_1^1H_{101} + 3L_1^3H_{200} + H_{201} + \\
&+ 3L_2^1W_{1t}^3 + 3L_1^3W_{2t}^1 + W_{1t}^3L_{11}^{11} + W_{1t}^1L_{11}^{13} + W_{1t}^1L_{11}^{31} \\
&K_{120} = 3L_{12}^{12}H_0 + 3L_{21}^{21}H_0 + L_{111}^{122}H_0 + L_{111}^{212}H_0 + L_{111}^{221}H_0 + 6L_2^2H_{100} + \\
&+ 3L_{11}^{12}H_{010} + 3L_{11}^{21}H_{010} + 3L_{11}^{22}H_{100} + 3L_1^1H_{020} + 3L_1^2H_{110} + H_{120} + \\
&+ 3L_2^2W_{1t}^1 + 3L_1^1W_{2t}^2 + W_{1t}^2L_{11}^{12} + W_{1t}^2L_{11}^{21} + W_{1t}^1L_{11}^{22} \\
&K_{021} = 3L_{12}^{32}H_0 + 3L_{21}^{23}H_0 + L_{111}^{223}H_0 + L_{111}^{232}H_0 + L_{111}^{322}H_0 + 6L_2^2H_{001} + \\
&+ 3L_{11}^{22}H_{001} + 3L_{11}^{23}H_{010} + 3L_{11}^{32}H_{010} + 3L_1^2H_{011} + 3L_1^3H_{020} + H_{021} + \\
&+ 3L_2^2W_{1t}^3 + 3L_1^3W_{2t}^2 + W_{1t}^3L_{11}^{22} + W_{1t}^2L_{11}^{23} + W_{1t}^2L_{11}^{32} \\
&K_{102} = 3L_{12}^{13}H_0 + 3L_{21}^{31}H_0 + L_{111}^{133}H_0 + L_{111}^{313}H_0 + L_{111}^{331}H_0 + 6L_2^3H_{100} + \\
&+ 3L_{11}^{13}H_{010} + 3L_{11}^{31}H_{001} + 3L_{11}^{33}H_{100} + 3L_1^1H_{002} + 3L_1^3H_{101} + H_{102} + \\
&+ 3L_2^3W_{1t}^1 + 3L_1^1W_{2t}^3 + W_{1t}^3L_{11}^{13} + W_{1t}^3L_{11}^{31} + W_{1t}^1L_{11}^{33} \\
&K_{012} = 3L_{12}^{23}H_0 + 3L_{21}^{32}H_0 + L_{111}^{233}H_0 + L_{111}^{323}H_0 + L_{111}^{332}H_0 + 6L_2^3H_{010} + \\
&+ 3L_{11}^{23}H_{001} + 3L_{11}^{32}H_{001} + 3L_{11}^{33}H_{010} + 3L_1^2H_{002} + 3L_1^3H_{011} + H_{012} + \\
&+ 3L_2^3W_{1t}^2 + 3L_1^2W_{2t}^3 + W_{1t}^3L_{11}^{23} + W_{1t}^3L_{11}^{32} + W_{1t}^2L_{11}^{33} \\
&K_{111} = L_{111}^{123}H_0 + L_{111}^{132}H_0 + L_{111}^{213}H_0 + L_{111}^{231}H_0 + L_{111}^{312}H_0 + L_{111}^{321}H_0 + \\
&+ 3L_{11}^{12}H_{001} + 3L_{11}^{21}H_{001} + 3L_{11}^{13}H_{010} + 3L_{11}^{31}H_{010} + 3L_1^1H_{011} + \\
&+ 3L_{11}^{23}H_{100} + 3L_{11}^{32}H_{100} + 3L_1^2H_{101} + 3L_1^3H_{110} + H_{111} + W_{1t}^3L_{11}^{12} + \\
&+ W_{1t}^2L_{11}^{13} + W_{1t}^3L_{11}^{21} + W_{1t}^1L_{11}^{23} + W_{1t}^2L_{11}^{31} + W_{1t}^1L_{11}^{32}
\end{aligned} \tag{2.56}
$$

Comentários finais

Dizer apenas que seria interessante realizar uma generalização deste método. Esta, para ser completa, teria que se realizar em dois sentidos: face a uma generalização do método a n parâmetros, mas também outra generalização, mais profunda, que, partindo de uma função geratriz mais geral, permitisse uma maior flexibilidade e um espectro de problemas onde ser aplicado ainda maior.

Bibliografia

[1] Abad, A.J. & Ribera, J. 'Método biparamétrico de perturbaciones del tipo Hori', *Publicaciones del Seminario Matemático "García de Galdeano"*, Serie II, Sección 1, **3**. Universidad de Zaragoza, 1984.

[2] Brouwer, D. 'Solution of the problem of artificial satellite without drag', *The Astrononical Journal*, **64**, 378-390 (1959).

[3] Budría, C. 'Métodos especiales de perturbaciones. Transformaciones canónicas no clásicas. Aplicaciones'. Tese doutoral. Universidad de Zaragoza, 1980.

[4] Campbell, J.A. & Jefferys, W.A. 'Equivalence of the perturbation theories of Hori and Deprit', *Celestial Mechanics*, **2**, 467-473 (1970).

[5] Choi, J.S. & Tapley, B.D. 'An extended canonical perturbation method', *Celestial Mechanics*, **7**, 77-90 (1973).

[6] Deprit, A. 'Canonical transformations depending on a small parameter', *Celestial Mechanics*, **1**, 12-30 (1969).

[7] Deprit, A. 'Note on Lagrange's inversion formula', *Celestial Mechanics*, **20**, 325--327 (1979).

[8] Henrard, J. & Roels, J. 'Equivalence for Lie transforms', *Celestial Mechanics*, **10**, 497-512 (1974).

[9] Hori, G.I. 'Theory of general perturbations with unspecified canonical variables', *Publ. Astron. Soc. Japan*, **18**, 287-296 (1966).

[10] Krylov, N.M. & Bogoliubov, N.N. 'Fundamentals of the problem of non-linear mechanics', *Publ. of A.N. Ukr.*, URSS (1934).

[11] Lagrange, J.L. 'Memoire sur la théorie de la variation des éléments des planets', *Mem. Cl. Sci. Math. Phys. Ins.*, France, 1-72 (1808).

[12] Lie, M.S. 'Theorie der transformationgruppen'. Teubner, Leipzig (1888).

[13] Pétriz, F. 'Sobre la aplicación de algunos métodos analíticos y numéricos a la teoría de perturbaciones'. Tese doutoral. Universidad de Zaragoza, 1980.

[14] Poincaré, H. 'Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste'. *Gauthier-Villars et Fils Editeurs*, Paris (1893).

[15] Ribera, J. 'Aplicación de los grupos de Lie de transformaciones a la integración de sistemas diferenciales perturbados'. Tese doutoral. Universidad de Zaragoza, 1981.

[16] Varadi, F. 'Two-parameter Lie transforms', *Celestial Mechanics*, **36**, 133-142 (1985).

[17] Von Zeipel, H. 'Récherches sur le mouvement des petites planetes', *Arkiv. Astron. Mat. Phys.*, **11, 12, 13** (1916-1917).